দশম অধ্যায়

দূরত্ব ও উচ্চতা

অতি প্রাচীন কাল থেকেই দূরবর্তী কোনো বস্তুর দূরত্ব ও উচ্চতা নির্ণয় করতে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের প্রয়োগ করা হয়। বর্তমান যুগে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের ব্যবহার বেড়ে যাওয়ায় এর গুরুত্ব অপরিসীম। যে সব পাহাড়, পর্বত, টাওয়ার, গাছের উচ্চতা এবং নদ–নদীর প্রস্থ সহজে মাপা যায় না সে সব ক্ষেত্রে উচ্চতা ও প্রস্থ ত্রিকোণমিতির সাহায্যে নির্ণয় করা যায়। এক্ষেত্রে সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান জেনে রাখা প্রয়োজন।

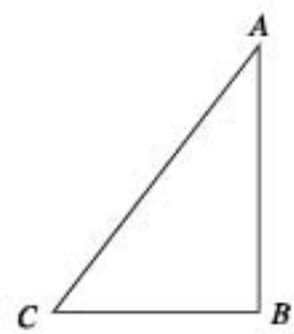
অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- ভূ–রেখা, উর্ধ্বরেখা, উলম্বতল, উন্নতি কোণ ও অবনতি কোণ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ত্রিকোণমিতির সাহায্যে দূরত্ব ও উচ্চতা বিষয়ক গাণিতিক সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- ত্রিকোণমিতির সাহায্যে হাতে–কলমে দূরত্ব ও উচ্চতা বিষয়ক বিভিন্ন পরিমাপ করতে পারবে।

ভূ–রেখা, উর্ধ্বরেখা এবং উলম্বতল :

ভূ–রেখা হচ্ছে ভূমি তলে অবস্থিত যেকোনো সরলরেখা। উর্ধ্বরেখা হচ্ছে ভূমি তলের উপর লম্ব যেকোনো সরলরেখা। একে উলম্ব রেখাও বলে।

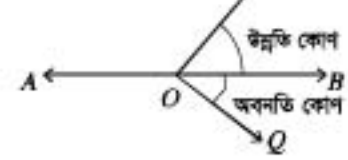
ভূমি তলের উপর লম্বভাবে অবস্থিত পরস্পরচ্ছেদী ভূ–রেখা ও উর্ধ্বরেখা একটি তল নির্দিষ্ট করে। এ তলকে উলম্ব তল বলে।



চিত্রে : ভূমি তলের কোনো স্থান C থেকে CB দূরত্বে AB উচ্চতা বিশিষ্ট একটি গাছ খাড়া অবস্থায় দন্ডায়মান। এখানে CB রেখা হচ্ছে ভূ–রেখা, BA রেখা হচ্ছে উর্ধ্বরেখা এবং ABC তলটি ভূমির উপর লম্ব যা উলম্ব তল।

উন্নতি কোণ ও অবনতি কোণ :

চিত্রটি লক্ষ করি, ভূমির সমান্তরাল AB একটি সরলরেখা। A, O, B, P, Q বিন্দুগুলো একই উলম্ব তলে অবস্থিত। AB সরলরেখার উপরের P বিন্দুটি AB রেখার সাথে $\angle POB$ উৎপন্ন করে। এখানে, O বিন্দুর সাপেক্ষে P বিন্দুর উন্নতি কোণ $\angle POB$ ।

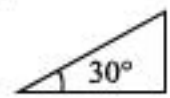


সুতরাং, ভূতলের উপরের কোনো বিন্দু ভূমির সমান্তরাল রেখার সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে উন্নতি কোণ বলা হয়।

Q বিন্দু ভূ–রেখার সমান্তরাল AB রেখার নিচের দিকে অবস্থিত। এখানে, O বিন্দুর সাপেক্ষে Q বিন্দুর অবনতি কোণ হচ্ছে $\angle QOB$. সুতরাং ভূতলের সমান্তরাল রেখার নিচের কোন বিন্দু ভূ–রেখার সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে অবনতি কোণ বলা হয়।

কাজ :
চিত্রটি চিহ্নিত কর এবং ভূ–রেখা ঊর্ধ্বরেখা, উলম্বতল, উন্নতি কোণ ও অবনতি কোণ নির্দেশ কর।

বিশেষ দ্রষ্টব্য : এ অধ্যায়ে সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে আনুমানিক সঠিক চিত্র আবশ্যক। চিত্র অঙ্কনের সময় নিচের কৌশল অবলম্বন করা দরকার।



(১) 30° কোণ অঙ্কনের ক্ষেত্রে ভূমি > লম্ব হবে।

(২) 45° কোণ অঙ্কনের ক্ষেত্রে ভূমি = লম্ব হবে।

(৩) 60° কোণ অঙ্কনের ক্ষেত্রে ভূমি < লম্ব হবে।

উদাহরণ ১। একটি টাওয়ারের পাদদেশ থেকে 75 মিটার দূরে ভূতলস্থ কোনো বিন্দুতে টাওয়ারের শীর্ষের উন্নতি 30° হলে, টাওয়ারের উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, টাওয়ারের উচ্চতা $AB = h$ মিটার টাওয়ারের পাদদেশ থেকে $BC = 75$ মিটার দূরে ভূতলস্থ C বিন্দুতে টাওয়ারের শীর্ষ A বিন্দুর উন্নতি $\angle ACB = 30^\circ$

সমকোণী ΔABC থেকে পাই, $\tan\angle ACB = \frac{AB}{BC}$

বা, $\tan 30^\circ = \frac{h}{75}$ বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{75}$ $\left[\because \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ বা, $\sqrt{3}h = 75$ বা, $h = \frac{75}{\sqrt{3}}$

বা, $h = \frac{75\sqrt{3}}{3}$ [হর এবং লবকে $\sqrt{3}$ দ্বারা গুণ করে] বা, $h = 25\sqrt{3}$

$\therefore\ h = 43.301$ (প্রায়)।

$\therefore$ টাওয়ারের উচ্চতা 43.30 মিটার (প্রায়)।

উদাহরণ ২। একটি গাছের উচ্চতা 105 মিটার। গাছটির শীর্ষের উন্নতি ভূমির কোনো বিন্দুতে উন্নতি কোণ 60° হলে, গাছটির গোড়া থেকে ভূতলস্থ বিন্দুটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, গাছের গোড়া থেকে ভূতলস্থ বিন্দুটির দূরত্ব $BC = x$ মিটার, গাছের উচ্চতা $AB = 105$ মিটার এবং C বিন্দুতে গাছটির শীর্ষ বিন্দুর উন্নতি $\angle ACB = 60^\circ$

ΔABC থেকে পাই,

$$\tan\angle ACB = \frac{AB}{BC} \text{ বা, } \tan 60^\circ = \frac{105}{x}$$

বা, $\sqrt{3} = \frac{105}{x}$ $\left[\because \tan 60^\circ = \sqrt{3}\right]$ বা, $\sqrt{3}x = 105$ বা, $x = \frac{105}{\sqrt{3}}$ বা, $x = \frac{105\sqrt{3}}{3}$ বা, $x = 35\sqrt{3}$

$\therefore\ x = 60.622$ মিটার (প্রায়)

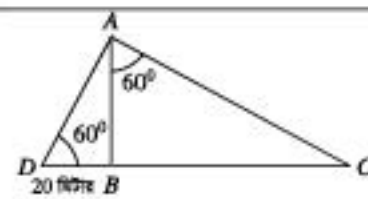
$\therefore$ গাছটির গোড়া থেকে ভূতলস্থ বিন্দুটি দূরত্ব 60.62 মিটার (প্রায়)।

কাজ :

চিত্রে AB একটি গাছ। চিত্রে প্রদত্ত তথ্য থেকে –

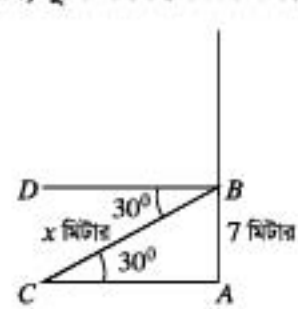
১। গাছটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

২। গাছটির পাদদেশ থেকে ভূতলস্থ C বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।



উদাহরণ ৩। ঝড়ে একটি গাছ হেলে পড়লো। গাছের গোড়া থেকে 7 মিটার উচ্চতায় একটি খুঁটি ঠেস দিয়ে গাছটিকে সোজা করা হলো। মাটিতে খুঁটিটির স্পর্শ বিন্দুর অবনতি কোণ 30° হলে, খুঁটিটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, গাছের গোড়া থেকে $AB = 7$ মিটার উচ্চতায় খুঁটিটি ঠেস দিয়ে আছে এবং অবনতি $\angle DBC = 30^\circ$।



$\therefore\ \angle ACB = \angle DBC = 30^\circ$ [একান্তর কোণ বলে]

ΔABC থেকে পাই,

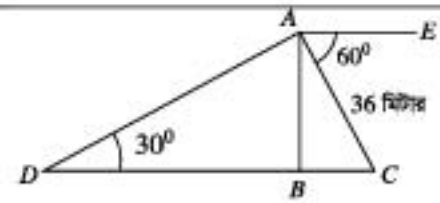
$$Sin\angle ACB = \frac{AB}{BC} \text{ বা, } Sin30^\circ = \frac{7}{BC}$$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{7}{BC}$ $\left[\because Sin30^\circ = \frac{1}{2}\right]$

$\therefore\ BC = 14$

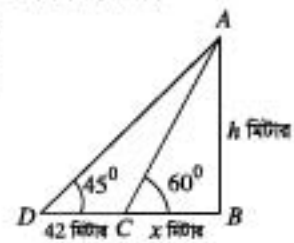
$\therefore$ খুঁটিটির দৈর্ঘ্য 14 মিটার।

কাজ : চিত্রে অবনতি $\angle CAE = 60^\circ$, উন্নতি $\angle ADB = 30^\circ$ $AC = 36$ মিটার, $AB \perp DC$ এবং D,B,C একই সমতলরেখায় অবস্থিত। AB, AD এবং CD বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।



উদাহরণ ৪। ভূতলস্থ কোনো স্থানে একটি দালানের ছাদের একটি বিন্দুর উন্নতি কোণ 60°। ঐ স্থান থেকে 42 মিটার পিছিয়ে গেলে দালানের ঐ বিন্দুর উন্নতি কোণ 45° হয়। দালানের উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, দালানের উচ্চতা $AB = h$ মিটার, শীর্ষের উন্নতি $\angle ACB = 60^\circ$ এবং C স্থান থেকে $CD = 42$ মিটার পিছিয়ে গেলে উন্নতি $\angle ADB = 45^\circ$ হয়।



ধরি, $BC = x$ মিটার।

$\therefore\ BD = BC + CD = (x + 42)$ মিটার।

ΔABC থেকে পাই,

$$\tan 60^0 = \frac{AB}{BC} \text{ বা, } \sqrt{3} = \frac{h}{x} \qquad \left[\because \tan 60^0 = \sqrt{3}\right]$$

$$\therefore\ x = \frac{h}{\sqrt{3}} \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

আবার, ΔABD থেকে পাই, $\tan 45^\circ = \frac{AB}{BD}$

$$\text{বা, } 1 = \frac{h}{x+42} \qquad \left[\because \tan 45^0 = 1\right] \text{বা, } h = x + 42$$

$$\text{বা, } h = \frac{h}{\sqrt{3}} + 42; \quad [\text{(i) নং সমীকরণের সাহায্যে।}]$$

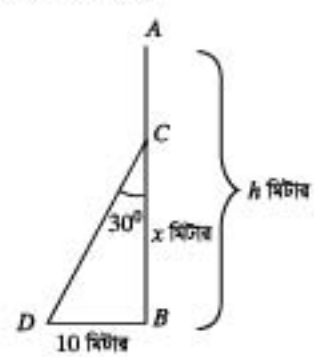
$$\text{বা, } \sqrt{3}h = h + 42\sqrt{3} \text{ বা, } \sqrt{3}h - h = 42\sqrt{3} \text{ বা, } \left(\sqrt{3} - 1\right)h = 42\sqrt{3} \text{ বা, } h = \frac{42\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$$

$\therefore h = 99.373$ মিটার (প্রায়)

দালানটির উচ্চতা 99.373 মিটার (প্রায়)।

উদাহরণ ৫। একটি খুঁটি এমন ভাবে ভেঙে গেল যে, তার অবিচ্ছিন্ন ভাঙা অংশ দন্ডায়মান অংশের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে খুঁটির গোড়া থেকে 10 মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করে। সম্পূর্ণ খুঁটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, সম্পূর্ণ খুঁটির দৈর্ঘ্য $AB = h$ মিটার। খুঁটিটি $BC = x$ মিটার উচ্চতায় ভেঙে গিয়ে বিচ্ছিন্ন না হয়ে ভাঙা অংশ দন্ডায়মান অংশের সাথে $\angle BCD = 30^\circ$ উৎপন্ন করে গোড়া থেকে $BD = 10$ মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করে।



এখানে, $CD = AC = AB - BC = (h - x)$ মিটার

ΔBCD থেকে পাই,

$tan30^\circ = \frac{BD}{BC}$ বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{x}$ $\therefore\ x = 10\sqrt{3}$

আবার, $sin30^\circ = \frac{BD}{CD}$ বা, $\frac{1}{2} = \frac{10}{h-x}$

বা, $h - x = 20$ বা, $h = 20 + x$ বা, $h = 20 + 10\sqrt{3}$; [x-এর মান বসিয়ে]

$\therefore\ h = 37.321$ (প্রায়) $\therefore$ খুঁটির দৈর্ঘ্য 37.32 মিটার (প্রায়)।

কাজ :

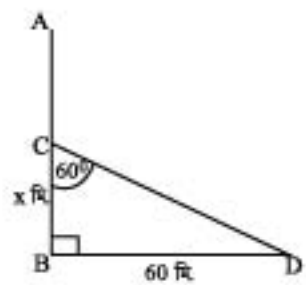
দুইটি মাইল পোস্টের মধ্যবর্তী কোনো স্থানের উপরে একটি বেলুন উড়ছে। বেলুনের স্থানে ঐ মাইল পোস্ট দুইটির অবনতি কোণ যথাক্রমে 30° ও 60° হলে, বেলুনটির উচ্চতা মিটারে নির্ণয় কর।

অনুশীলনী ১০

১। একটি দন্ডের দৈর্ঘ্য তার ছায়ার দৈর্ঘ্যের এক তৃতীয়াংশ হলে ছায়ার প্রান্ত বিন্দুতে সূর্যের উন্নতি কোণ কত?

ক. 15^0 খ. 30^0 গ. 45^0 ঘ. 60^0

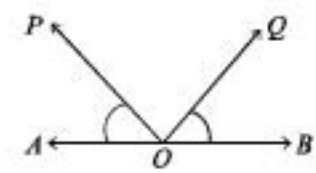
২। পাশের চিত্রে x এর মান নিচের কোনটি?



ক. $\frac{\sqrt{3}}{60}$ খ. $\frac{20}{\sqrt{3}}$

গ. $20\sqrt{3}$ ঘ. $60\sqrt{3}$

৩। পাশের চিত্রে O বিন্দুতে P বিন্দুর উন্নতি কোণ কোনটি?



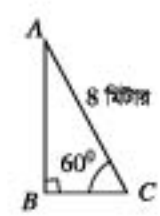
ক. $\angle QOB$ খ. $\angle POA$ গ. $\angle QOA$ ঘ. $\angle POB$

৪। অবনতি কোণের মান কত ডিগ্রী হলে একটি খুঁটির দৈর্ঘ্য ও ছায়ার দৈর্ঘ্য সমান হবে?

ক. 30^0 খ. 45^0 গ. 60^0 ঘ. 90^0

পাশের চিত্র অনুযায়ী ৫নং-৬নং প্রশ্ন দুইটির উত্তর দাও।

৫। BC এর দৈর্ঘ্য হবে –



ক. $\frac{4}{\sqrt{3}}$ মিটার খ. 4 মিটার

গ. $4\sqrt{2}$ মিটার ঘ. $4\sqrt{3}$ মিটার

৬। AB এর দৈর্ঘ্য হবে–

ক. $\frac{4}{\sqrt{3}}$ মিটার খ. 4 মিটার

গ. $4\sqrt{2}$ মিটার ঘ. $4\sqrt{3}$ মিটার

৭। উন্নতি কোণ –

i) 30^0হলে, ভূমি > লম্ব হবে।

ii) 45^0হলে, ভূমি = লম্ব হবে।

iii) 60^0হলে, লম্ব < ভূমি হবে।

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. *i* ও *ii* খ. *ii* ও *iii* গ. *i* ও *iii* ঘ. *i, ii* ও *iii*

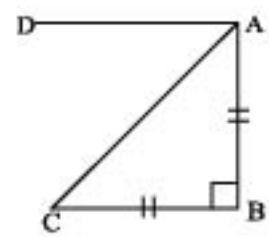
৮। পাশের চিত্রে –

i) $\angle DAC$ অবনতি কোণ।

ii) $\angle ACB$ উন্নতি কোণ।

iii) $\angle DA\,C = \angle ACB$

নিচের কোনটি সঠিক ?



ক. *i* ও *ii* খ. *ii* ও *iii* গ. *i* ও *iii* ঘ. *i, ii* ও *iii*

৯। ভূ-রেখার অপর নাম কী?

ক. লম্বরেখা খ. সমান্তরালরেখা গ. শয়নরেখা ঘ. উর্ধ্বরেখা

১০। একটি মিনারের পাদদেশ থেকে কিছু দূরে একটি স্থানে মিনারটির শীর্ষের উন্নতি কোণ 30° এবং মিনারটির উচ্চতা 26 মিটার হলে, মিনার থেকে ঐ স্থানটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

১১। একটি গাছের পাদদেশ থেকে 20 মিটার দূরে ভূতলের কোনো বিন্দুতে গাছের চূড়ার উন্নতি কোণ 60° হলে, গাছটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

১২। 18 মিটার দৈর্ঘ্যের একটি মই ভূমির সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে দেওয়ালের ছাদ স্পর্শ করে। দেওয়ালটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

১৩। একটি ঘরের ছাদের কোনো বিন্দুতে ঐ বিন্দু থেকে 20 মিটার দূরের ভূতলস্থ একটি বিন্দুর অবনতি কোণ 30° হলে, ঘরটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

১৪। ভূতলে কোনো স্থানে একটি স্তম্ভের শীর্ষের উন্নতি কোণ 60°। ঐ স্থান থেকে 25 মিটার পিছিয়ে গেলে স্তম্ভটির উন্নতি কোণ 30° হয়। স্তম্ভটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

১৫। কোনো স্থান থেকে একটি মিনারের দিকে 60 মিটার এগিয়ে আসলে মিনারের শীর্ষবিন্দুর উন্নতি কোণ 45° থেকে 60° হয়। মিনারটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

১৬। একটি নদীর তীর কোনো এক স্থানে দাড়িয়ে একজন লোক দেখল যে, ঠিক সোজাসোজি অপর তীরে অবস্থিত একটি টাওয়ারের উন্নতি কোণ 60°। ঐ স্থান থেকে 96 মিটার পিছিয়ে গেলে উন্নতি কোণ 30° হয়। টাওয়ারের উচ্চতা এবং নদীর বিস্তার নির্ণয় কর।

১৭। 64 মিটার লম্বা একটি খুঁটি ভেঙে গিয়ে সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন না হয়ে ভূমির সাথে 60° উৎপন্ন করে। খুঁটিটির ভাঙা অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

১৮। একটি গাছ ঝড়ে এমনভাবে ভেঙে গেল যে অবিচ্ছিন্ন ভাঙা অংশ দন্ডায়মান অংশের সাথে 30° কোণ করে গাছের গোড়া থেকে 12 মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করে। সম্পূর্ণ গাছটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

১৯। একটি নদীর এক তীরে কোনো স্থানে দাঁড়িয়ে একজন লোক দেখলো যে, ঠিক সোজাসোজি অপর তীরে অবস্থিত 150 মিটার লম্বা একটি গাছের শীর্ষের উন্নতি কোণ 30°। লোকটি একটি নৌকাযোগে গাছটিকে লক্ষ্য করে যাত্রা শুরু করলো। কিন্তু পানির স্রোতের কারণে লোকটি গাছ থেকে 10 মিটার দূরে তীরে পৌঁছল।

(ক) উপরোক্ত বর্ণনাটি চিত্রের মাধ্যমে দেখাও।

(খ) নদীর বিস্তার নির্ণয় কর।

(গ) লোকটির যাত্রা স্থান থেকে অবতরণের স্থানের দূরত্ব নির্ণয় কর।

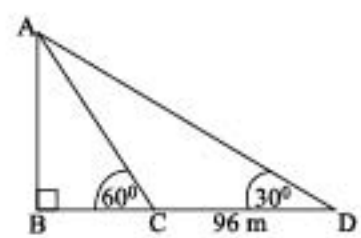
২০। 16 মিটার দীর্ঘ একটি মই লম্বভাবে দন্ডায়মান একটি দেওয়ালের ছাদ বরাবর ঠেস দিয়ে রাখা হলো । ফলে এটি ভূমির সাথে 60^0কোণ উৎপন্ন করল ।

(ক) উদ্দীপক অনুসারে সংক্ষিপ্ত বর্ণনাসহ চিত্র অঙ্কন কর ।

(খ) দেওয়ালটির উচ্চতা নির্ণয় কর ।

(গ) দেওয়ালের সাথে ঠেস দিয়ে রাখা অবস্থায় মইটিকে পূর্বের অবস্থান থেকে ভূমি বরাবর আর কতদূর সরালে মইটি ভূমির সাথে 30^0 কোণ উৎপন্ন করবে?

২১। চিত্রে, $CD = 96$ মিটার ।



(ক) $\angle CAD$ এর ডিগ্রী পরিমাপ নির্ণয় কর ।

(খ) BC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর ।

(গ) ΔACD এর পরিসীমা নির্ণয় কর ।